zajęcia otwarte z fizyki

WAHADŁO MATEMATYCZNE

Instrukcja dla uczniów szkół ponadpodstawowych

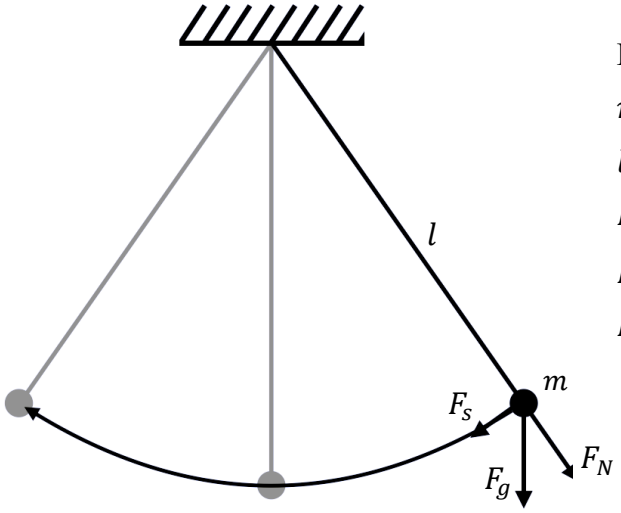
WSTĘP

Celem doświadczenia jest wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła matematycznego.

Wahadło matematyczne to punkt materialny, zawieszony na nieważkiej nici i poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Wahadło rzeczywiste, które zostało przedstawione na Rysunku 1., może być traktowane jako wahadło matematyczne, jeżeli:

- rozmiary ciała są niewielkie w stosunku do długości nici, na której jest zawieszone;
- nić jest nieważka i nierozciągliwa;
- wahadłu zostały nadane warunki początkowe (prędkość początkowa) takie, że wykonuje drgania po okręgu w płaszczyźnie pionowej (a nie ruch po elipsie w płaszczyźnie poziomej);
- na ciało działają jedynie siła ciężkości oraz siła reakcji nici (pomijalne są inne siły, np. siła oporów ruchu).



Rysunek 1. Wahadło matematyczne:

m – masa wahadła,

l – długość wahadła,

F_g – siła grawitacji,

F_N – siła powodująca naciągnięcie nici,

F_s – siła powodująca ruch wahadła.

$$\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_s}$$

Okres drgań wahadła matematycznego (T) poruszającego się w zakresie małych kątów wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (1)$$

gdzie:

l – długość wahadła (odległość pomiędzy środkiem ciężkości wahadła a punktem jego zawieszenia), która jest podawana w metrach [m],

g – przyspieszenie ziemskie, którego wartość wynosi: ..... $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$,

π – stała matematyczna, której wartość to w przybliżeniu 3,141593.

WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Polskie Towarzystwo Fizyczne Oddział Warszawski
projekt współfinansuje miasto stołeczne Warszawa

Analizując ten wzór, można zauważyć, że w przybliżeniu dla małych drgań wahadła okres drgań nie zależy od jego masy i amplitudy, a jedynie od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego. W przypadku, gdy znana jest długość l i jego okres drgań T, wahadło może posłużyć do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego g. Przekształcając wzór (1), otrzymujemy wzór na przyspieszenie ziemskie:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l. \tag{2}$$

UKŁAD POMIAROWY

Do wykonania doświadczenia potrzebne będą:

- wahadło o regulowanej długości,
- taśma miernicza,
- suwmiarka,
- linijka,
- kartka papieru z zaznaczoną linią,
- stoper.

POMIARY

Zadanie 1.

Na początku doświadczenia należy ustalić długość wahadła. Najlepiej zrobić to tak, aby dolna krawędź kuli znajdowała się kilka centymetrów w nad ziemią. *Pamiętajmy, że poprzez długość wahadła rozumiemy odległość pomiędzy środkiem ciężkości wahadła a punktem jego zawieszenia.* Aby wyznaczyć dokładną długość wahadła należy skorzystać ze wzoru:

$$l = L - h - r \tag{3}$$

gdzie:

L – odległość od podłogi po punktu zawieszenia wahadła,

h – wysokość od ziemi do dolnej krawędzi kuli,

r – promień kuli.

Wszystkie pomiary możesz zapisać w Tabeli 1, która jest umieszczona na końcu instrukcji. *Bardzo ważne jest zapisywanie jednostek!*

Zadanie 2.

Tuż pod kulą, na podłodze, należy położyć kartkę z narysowaną linią – będzie ona wyznaczała miejsce, od którego należy rozpocząć pomiar okresu drgań wahadła. W momencie, gdy kula zwisa swobodnie i nie wykonuje żadnego ruchu, nasze wahadło znajduje się w stanie równowagi. Następnym elementem eksperymentu jest wypracowanie najlepszej metody wychylenia wahadła ze stanu równowagi – w kierunku prostopadłym do narysowanej na kartce kreski, na odległość ok. 30 cm. Należy pamiętać, że wahadło nie może krążyć po elipsie, kula nie może kiwać się wokół własnego środka ciężkości oraz nie może się obracać wokół własnej

WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Polskie Towarzystwo Fizyczne Oddział Warszawski
projekt współfinansuje miasto stołeczne Warszawa

osi. Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów, należy wykonać kilka próbnych. Spróbuj zmierzyć 10 pojedynczych okresów drgań wahadła. Pamiętaj, że pojedynczy okres jest to przedział czasu, między dwoma przejściami kuli nad kreską narysowaną na kartce w tę samą stronę.

Co możesz powiedzieć o uzyskanych wynikach? Czy są one powtarzalne? Jakie czynniki wpływają na ich powtarzalność?

Zadanie 3. Właściwe pomiary.

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego, należy wykonać 5 razy pomiar czasu trwania dziesięciu okresów drgań wahadła. Całą czynność należy powtórzyć dla pięciu różnych długości wahadła. Wszystkie pomiary oraz obliczenia zapisz w Tabeli 1, która znajduje się na końcu instrukcji.

Aby wyznaczyć wartości przyspieszenia ziemskiego dla naszego wahadła, należy je policzyć dla każdej długości wahadła osobno, a następnie wyznaczyć średnią arytmetyczną.

Średnie przyspieszenie ziemskie $g_{śr}$ wynosi:

$$g_{śr} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Porównaj otrzymane wyniki przyspieszenia z tablicową wartością dla Warszawy, która wynosi:

$$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Zadanie 4. Oszacowanie niepewności pomiarowych.

Do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego niezbędne było wykonanie pomiarów bezpośrednich: długości wahadła oraz okresu jego drgań. *Czy uważasz, że pomiary te zostały wykonane bardzo dokładnie czy są obarczone niepewnościami? Zastanów się, jakie czynniki mogły wpłynąć na niepewności pomiarowe?* Spróbuj oszacować, z jakimi niepewnościami pomiarowymi dokonałeś pomiarów długości oraz okresu drgań wahadła. Możesz przyjąć je jako wielkość najmniejszej działki urządzenia, którego użyłeś do pomiaru.

$\Delta l = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\Delta T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Należy pamiętać, że przyspieszenie ziemskie g jest wielkością obliczoną pośrednio na podstawie pomiarów bezpośrednich (długość wahadła l i okres drgań T) i również jest obarczona niepewnością. Przyspieszenie ziemskie obliczane jest zgodnie ze wzorem (2). Niepewność wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego można obliczyć jako:

$$u_g = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Polskie Towarzystwo Fizyczne Oddział Warszawski
projekt współfinansuje miasto stołeczne Warszawa

gdzie u_1 jest związane z niepewnością pomiaru długości wahadła l, natomiast u_2 jest związane z niepewnością pomiaru okresu drgań T i wyraża się następującymi wzorami:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left|g|_{l+u_l} - g|_{l-u_l}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (l+u_l) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (l-u_l)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |(l+u_l) - (l-u_l)| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 u_l$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left|g|_{T+u_T} - g|_{T-u_T}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2\pi}{T+u_T}\right)^2 l - \left(\frac{2\pi}{T-u_T}\right)^2 l\right|$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^2 l \left|\frac{(T-u_T)^2}{(T+u_T)^2(T-u_T)^2} - \frac{(T+u_T)^2}{(T+u_T)^2(T-u_T)^2}\right|$$

$$= (2\pi)^2 l \frac{(T-u_T)(T+u_T) - (T+u_T)(T+u_T)}{(T+u_T)^2(T-u_T)^2} = (2\pi)^2 l \frac{(T-u_T) - (T+u_T)}{(T+u_T)^2(T-u_T)} \xrightarrow{u_T \ll T}$$

$$-\frac{2(2\pi)^2 l}{T^3} u_T = -\frac{8\pi^2 l}{T^3} u_T$$

Oblicz powyższe niepewności dla kilku wybranych punktów pomiarowych i wpisz wyniki do Tabeli 6.

Tabela 6. Wartości niepewności wyznaczania oporu

u_1	u_2	u_g

Co to według Ciebie oznacza? Czy otrzymane wartości niepewności oporu są ze sobą zgodne? Czy potrafisz określić wpływ tych niepewności na niepewność określenia oporu układu?

Opracowanie:
A. Tartas, A. Drabińska

WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Polskie Towarzystwo Fizyczne Oddział Warszawski
projekt współfinansuje miasto stołeczne Warszawa

Tabela 1. Wyniki pomiarów i obliczeń.

Lp.	L [m]	h [m]	r [m]	l [m]	$10 \cdot T$ [s]	$10 \cdot T_{śr}$[s]	$T_{śr}$[s]	$T_{śr}{}^2$[s^2]	g $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$
1									
2									
3									

WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTET WARSZAWSKI
Polskie Towarzystwo Fizyczne
Oddział Warszawski
projekt współfinansuje miasto stołeczne Warszawa

Lp.	L [m]	h [m]	r [m]	l [m]	$10 \cdot T$ [s]	$10 \cdot T_{śr}$[s]	$T_{śr}$[s]	$T_{śr}{}^2$[s^2]	g $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$
4									
5									